# משפט בולצנו-ווירשטראס

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת

# משפט

סדרה מתכנסת אם ורק אם היא מקיימת תנאי קושי: לכל קיים כך שאם אזי

# הערה

משפטים אלה אינם נכונים ב. דוגמה: : . הסדרה חסומה אבל אין לה תת סדרה מתכנסת(ב) שכן כל תת סדרה מתכנסת ל שלא שייך ל

# הגדרות

תהי .

אם לא חסומה מלעיל אזי   
אם לא חסומה מלרע אזי   
אם אזי   
אם אזי

נסמן את הקבוצה של הגבולות החלקיים הסופיים של בS.

אם וחסומה מלעיל   
אם וחסומה מלרע

# משפט

א) אם חסומה מלעיל ו אזי , (בפרט הינו גבול חלקי של הגבול החלקי הכי גדול)

ב) אם חסומה מלרע ו אזי , (בפרט הינו גבול חלקי של הגבול החלקי הכי קטן)

# הוכחה

א) כיוון ש חסומה מלעיל, S חסומה מלעיל (אמנם חסם מלעיל ל מהווה חם מלעיל לS גם כן). לכן וחסומה מלעיל וקיים

לכל קיים כך ש. כיוון ש הינו גבול חלקי ל קיימת תת סדרה של המתכנסת ל, לכן לכל אפשר למצוא איברים עם אינדקס גדול כרצוננו כך ש.

ניקח כך ש. נניח שכבר בחרנו כך ש. נבחר ב כך ש

נתבונן ב. ברור שתת סדרה זו הינה תת סדרה של שכן

טענה: .

אמנם, יהי , ניקח K כך ש. אזי עבור כל מתקיים

*הוכחנו ש ז"א A הינו גבול חלקי של או . לכן*

# דוגמאות

1)

2)

# משפט

# הוכחה

אם אזי ו. בנוסף לכך אם אזי לפי ההגדרה. באופן דומה לגבי

נשאר להניח שa סופי. אם אזי הינו הגבול החלקי היחיד של ז"א מכאן ברור ש  
בכיוון ההפוך אם אזי ולכן ז"א שיש אך ורק גבול חלקי אחד ל, הלא הוא a. כבר הוכחנו שבנסיבות אלה

# הוכחנו כבר

1. אם לכל n וקיים אזי
2. אם לכל n וקיים אזי
3. אם קיים N כך ש לכל
4. אם קיים N כך ש לכל

# משפט

1. אם לכל n אזי
2. אם לכל n אזי
3. אם אזי קיים N כך לכל
4. אם אזי קיים N כך לכל

## הוכחה

א) מתקיים לכל תת סדרה מתכנסת של . לכן b הינו חסם מלעיל לS, לכן

ג) אחרת מתקיים עבור אינסוף אינדקסים. לכן ע"פ משפט בולצנו-ווישטראס קיימת תת סדרה של המתכנסת במובן הרחב לגבול ולכן בניגוד להנחה

קבוצות של נקודות ב

הגדרה

תהי . נאמר ש הינה נקודת הצטברות שלE אם לכל מתקיים . ז"א שלכל קיים ב סביבה של נקודה של E השונה מ

## הערה

לא דורשים ש. יתכן שכן, יתכן שלא.

## הערה

אם הינה נקודת הצטברות של E אזי בכל E סביבה של יש אינסוף איברים של E

# דוגמאות

1. קבוצה סופית: . קבוצת נקודות ההצטברות של E היא
2. =>
3. =>
4. = =<
5. =>
6. =>

# הגדרה

נקראת סגורה אם

- סגורה - לא סגורה - לא סגורה

# משפט בולצנו ווירשטראס עבור קבוצות

תהי קבוצה אינסופית חסומה. אזי לE יש נקודת הצטברות(ב).

## הוכחה

קיים כך ש לכל

*לפחות אחד מהקטעים מכיל אינסוף נקודות של E. מגדירים לפי אינדוקציה קטעים כך ש ולכן כאשר כל מכיל אינסוף נקודות של E. נתבונן ב. לפי למת קנטור קיים כך ש  
טענה: c הינה נקודת הצטברות של E*  
יהי . עבור N מספיק גדול . כיוון שיש אינסוף איברים של E ב רואים שיש אינסוף איברים של E בקטע ולכן c הינה נקודת הצטברות של E

# משפט

תהי a נקודת הצטברות של , אזי קיימת סדרה כך ש לכל n ו אם ו

## הוכחה

ניקח כך ש. יהי . יהי . קיים כך ש. ברור ש. יהי . קיים כך ש. באופן כזה נגדיר סדרה כך ש עבור וכך ש. סדרה זו מתכנסת לa